作业九 （12月22日课堂上交）

1. 本次作业，仍然是关于定义的。

a) 假设群 G 作用在集合 X 上，满足如下的相悖性：

存在 X 的两两互不相交的子集 $A_1,\cdots,A_m$ 和 $B_1,\cdots,B_n$ （其中 $A_i\cap B_j=\varnothing$ ，$\forall 1\le i\le m, 1\le j\le n$ ，$A_i\cap A_j=\varnothing$ ，$\forall 1\le i\ne j\le m$ ，并且 $B_i\cap B_j=\varnothing$ ，$\forall 1\le i\ne j\le n$ ），以及 G 中元素 $a_1,\cdots,a_m$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ ，使得

$$X=\bigsqcup_{i=1}^{m} a_i(A_i)=\bigsqcup_{j=1}^{n} b_j(B_j)\text{。}$$

证明：一定存在 X 的两两互不相交（两两互不相交的含义和上面类似）子集 $C_1,\cdots,C_p$ 、$D_1,\cdots,D_q$ 和 $F_1,\cdots,F_r$ 以及 G 中元素 $c_1,\cdots,c_p$ 、$d_1,\cdots,d_q$ 和 $f_1,\cdots,f_r$ ，使得

$$X=\bigsqcup_{i=1}^{p} c_i(C_i)=\bigsqcup_{j=1}^{q} d_j(D_j)=\bigsqcup_{k=1}^{r} f_k(F_k)\text{。}$$

换言之，需要证明的是，如果可以一分为二，每份“大小不变”，则可以一分为三，每份“大小不变”。

b) 证明 a) 之逆。换言之，证明：如果可以一分为三，每份“大小不变”，则可以一分为二，每份“大小不变”。

提示：Banach-Schröder-Bernstein定理。

参考答案：

a) 根据题目假设，存在 X 的两两互不相交的子集 $A_1,\cdots,A_m$ 和 $B_1,\cdots,B_n$ （其中 $A_i\cap B_j=\varnothing$ ，$\forall 1\le i\le m, 1\le j\le n$ ，$A_i\cap A_j=\varnothing$ ，$\forall 1\le i\ne j\le m$ ，并且 $B_i\cap B_j=\varnothing$ ，$\forall 1\le i\ne j\le n$ ），以及 G 中元素 $a_1,\cdots,a_m$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ ，使得

$$X=\bigsqcup_{i=1}^{m} a_i(A_i)=\bigsqcup_{j=1}^{n} b_j(B_j)\text{。}$$

我们有 X 的两个剖分

$$X=b_1(B_1)\sqcup\cdots\sqcup b_n(B_n)$$

和

$$X=(A_1\sqcup\cdots\sqcup A_m)\bigsqcup(B_1\sqcup\cdots\sqcup B_n)\ 。$$

根据上面两个剖分可以得到加细剖分如下：

$$b_1(B_1)=((b_1(B_1)\cap A_1)\sqcup\cdots\sqcup(b_1(B_1)\cap A_m))\bigsqcup((b_1(B_1)\cap B_1)\sqcup\cdots\sqcup(b_1(B_1)\cap B_n))$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$b_n(B_n)=((b_n(B_n)\cap A_1)\sqcup\cdots\sqcup(b_n(B_n)\cap A_m))\bigsqcup((b_n(B_n)\cap B_1)\sqcup\cdots\sqcup(b_n(B_n)\cap B_n))$$

令

$$C_{ij}=b_i(B_i)\cap A_j\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m$$

$$D_{ik}=b_i(B_i)\cap B_k\ 1\le i\le n,\ 1\le k\le n\ 。$$

则

$$X=\left(\bigsqcup_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}C_{i,j}\right)\bigsqcup\left(\bigsqcup_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le n}}D_{i,k}\right)\ 。$$

令

$$C'_{ij}=b_i^{-1}(C_{ij}),\ \ \forall 1\le i\le n,\ 1\le j\le m$$

$$D'_{ik}=b_i^{-1}(D_{ik}),\ \ \forall 1\le i\le n,\ 1\le k\le n\ 。$$

则

$$\begin{aligned}B_1&=b_1^{-1}(b_1(B_1))\\&=b_1^{-1}\left((C_{11}\sqcup\cdots\sqcup C_{1m})\bigsqcup(D_{11}\sqcup\cdots\sqcup D_{1n})\right)\\&=(b_1^{-1}(C_{11})\sqcup\cdots\sqcup b_1^{-1}(C_{1m}))\bigsqcup(b_1^{-1}(D_{11})\sqcup\cdots\sqcup b_1^{-1}(D_{1n}))\\&=(C'_{11}\sqcup\cdots\sqcup C'_{1m})\bigsqcup(D'_{11}\sqcup\cdots D'_{1n})\end{aligned}$$

对于所有的 $1\le i\le n$ ，我们均可对 B_i 做上述的剖分。因此

$$\bigsqcup_{i=1}^{n}B_i=\left(\bigsqcup_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}C'_{ij}\right)\bigsqcup\left(\bigsqcup_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le n}}D'_{ik}\right)$$

至此，我们找到了 X 中两两互不相交的子集 $A_1,\cdots,A_m$ 、 $C'_{ij}\ (1\le i\le n,1\le j\le m)$ 和 $D'_{ik}\ (1\le i\le n,1\le k\le n)$ ，满足

$$X=\bigsqcup_{i=1}^{m}a_i(A_i)$$

$$X=\bigsqcup_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}(a_j\cdot b_i)(C'_{ij})\quad（为什么？）$$

$$X=\bigsqcup_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le n}}(b_k\cdot b_i)(D'_{ij})\quad（为什么？）$$

至此，我们证明了：如果可以“一分为二”，则可以“一分为三”。证毕。 □

b) 证明：用 $\lesssim_G$ 代表 G-小于等于，用 $\sim_G$ 来代表 G-等价。

如果可以“一分为三”，则存在 X 上的两两互不相交的子集 $A_1,\cdots,A_m$ ， $B_1,\cdots,B_n$ 和 $C_1,\cdots,C_p$ ，使得

$$X \ \sim_G \ \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i \ \sim_G \ \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j \ \sim_G \ \bigsqcup_{k=1}^{p} C_k \text{。}$$

由于

$$\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{p} C_k\right) \ \subset \ X \text{，}$$

我们有

$$\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{p} C_k\right) \lesssim_G X \text{。}$$

注意到

$$X \ \sim_G \ \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j \ \subset \ \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{p} C_k\right) \text{，}$$

我们有

$$X \lesssim_G \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{p} C_k\right) \text{。}$$

根据 Banach-Schröder-Bernstein 定理，

$$\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{p} C_k\right) \ \sim_G \ X \text{。}$$

令 $D_1 = B_1,\cdots,D_n = B_n$ ， $D_{n+1} = C_1,\cdots,D_{n+p} = C_p$ 。则 X 中存在互不相交的子集 $A_1,\cdots,A_m$ 和 $D_1,\cdots,D_{n+p}$ ，满足

$$X \ \sim_G \ \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i \ \sim_G \ \bigsqcup_{s=1}^{n+p} D_s \text{。}$$

因此 X 在群 G 的作用下可以“一分为二”（如果可以“一分为三”的话）。证毕。 □